

2. LÍMITES DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD EN \mathbf{R}

2.1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Def:

Una función f es una regla que asigna a cada uno de los números x de un subconjunto D de \mathbf{R} un único número real $f(x)$.
 $A \subset D$ $\text{dom} f$ se le llama dominio de f . y $f(x)$ es el valor de f en x .
Imagen o recorrido de f es $f(D) = \text{im} f = \{f(x): x \in D\}$.

$$\begin{array}{cc} f: D & f(D) \\ x & y = f(x) \end{array}$$

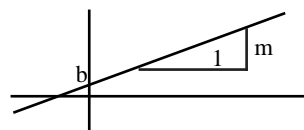
En ocasiones f admite una expresión algebraica (por ejemplo $f(x)=|x|$, $f(x)=\sin x$, ...), pero en otras no será expresable ni por una serie de palabras. Una f estará determinada si conocemos todos los x de D y los valores y correspondientes. Esto nos lleva a una definición más teórica, aunque más precisa:

Def:

Una función f es un conjunto de pares ordenados que no contiene dos distintos con el mismo primer elemento

[así, la "función $|x|$ " sería $\{(x, |x|): x \in \mathbf{R}\}$ (si no se precisa más, $\text{dom} f$ es el conjunto de x para los que f tiene sentido)]

Geométricamente, f se puede representar con un sistema de coordenadas como un conjunto de puntos (gráfica de f) en el plano xy . Así, la gráfica de $f(x)=mx+b$ es un conjunto de puntos que constituyen una recta (m es su pendiente y b su corte con el eje y).



A partir de dos funciones f y g se pueden definir otras funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g y $f \circ g$:

Def:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad (f-g)(x) = f(x)-g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{para } x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g \\ (f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{para } x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g \quad \{x: g(x) \neq 0\} \\ (f \circ g)(x) &= f[g(x)] \quad (\text{composición de } f \text{ y } g) \quad \text{para } x \text{ tales que } x \in \text{dom} g \text{ y } g(x) \in \text{dom} f \end{aligned}$$

[suma y producto de funciones, como es inmediato ver, son conmutativas, asociativas y hay distributiva; la composición es asociativa, pero no conmutativa: si $f(x)=x^2$ y $g(x)=2x$ se tiene que $(f \circ g)(x)=4x^2$ $2x^2=(g \circ f)(x)$]

Def:

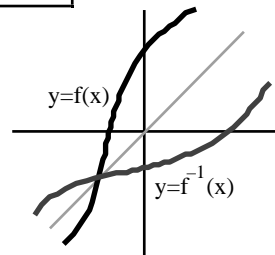
f es inyectiva en $A \subset \mathbf{R}$ si $f(x)=f(x^*) \implies x=x^*$ $x, x^* \in A$ [o sea, $x \neq x^* \implies f(x) \neq f(x^*)$]
 Si $f: x \mapsto y=f(x)$ es inyectiva existe la función inversa $f^{-1}: y \mapsto x=f^{-1}(y)$

$$\begin{array}{cc} f^{-1}: f(A) & A \\ y=f(x) & x=f^{-1}(y) \end{array}$$

[en términos de pares ordenados $f^{-1}=\{(y,x):(x,y) \in f\}$]. Propiedades inmediatas:

$$\text{dom} f^{-1} = \text{im} f, \quad \text{im} f^{-1} = \text{dom} f, \quad (f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(y) = x$$

La gráfica de f y la de f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y=x$ [pues (x,y) e (y,x) lo son]. Para escribir explícitamente $y=f^{-1}(x)$ (si se puede) se despeja la x en función de y de $y=f(x)$ y se cambia el nombre a las variables [por ejemplo, la inversa de $y=x^3-5$ es $y=(x+5)^{1/3}$ (pues $x=(y+5)^{1/3}$ al despejar)].

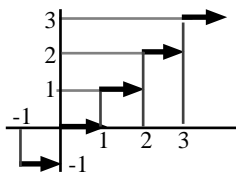


Def:

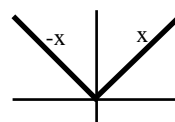
f es estrictamente creciente en A si $x, x^* \in A$ con $x < x^*$ se tiene $f(x) < f(x^*)$
estrictamente decreciente $f(x) > f(x^*)$
creciente $f(x) \leq f(x^*)$
decreciente $f(x) \geq f(x^*)$

Cualquiera de ellas se dice monótona (estrictamente monótonas, las dos primeras)

Ejemplos: $f(x)=[x]$ = máximo entero x
 [llamada "parte entera de x "]
 es creciente en todo \mathbf{R}
 [no estrictamente]



$f(x)=|x|$ es estrictamente decreciente en $\{x < 0\}$ y estrictamente creciente en $\{x > 0\}$



Teor:

f estrictamente monótona $\implies f$ inyectiva

[si $x \neq x^*$ o bien es $f(x) < f(x^*)$ o bien $f(x) > f(x^*)$]
 [posee por tanto función inversa]

[Para ver que una función es monótona (y por tanto inyectiva y con inversa) acudiremos en el futuro a las derivadas].

Definición y gráficas de las funciones elementales:

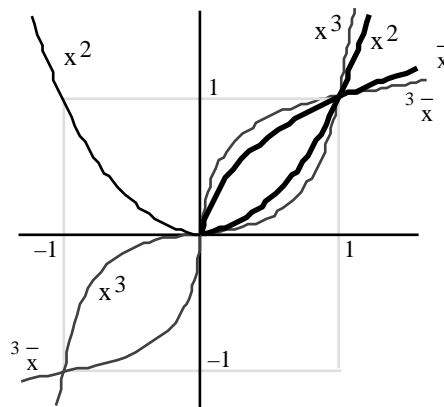
$$y = x^n, y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbf{N}$$

Si n impar, $y = x^n$ es inyectiva en todo \mathbf{R} y $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

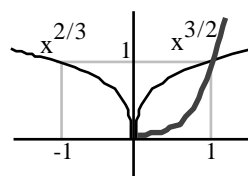
Su inversa $x^{1/n}$ está definida en \mathbf{R} y su imagen es \mathbf{R} .

Si n par, no es inyectiva en \mathbf{R} . Se llama entonces $y = x^{1/n}$ a la inversa de $y = x^n$ restringida al intervalo $[0, \infty)$, con lo que la $y = x^{1/n}$ tiene por dominio e imagen $[0, \infty)$.

($y = -x^{1/n}$, n par, es la inversa de $y = x^n$ restringida a $(-\infty, 0]$)

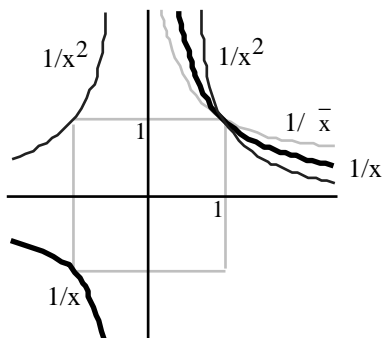


$$y = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}, m, n \in \mathbf{N}$$



$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

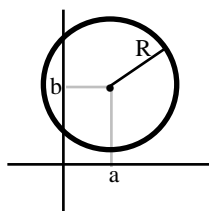
$$y = x^{-1/n} = \frac{1}{x^{1/n}}, n \in \mathbf{N}$$



Las curvas (cónicas):

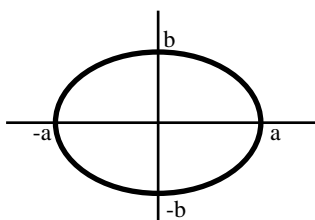
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

(circunferencia)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (*)$$

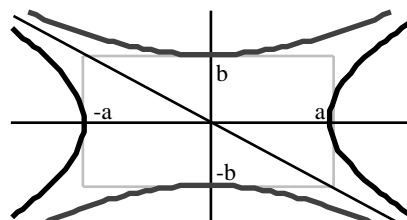
(elipse)



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

(hipérbolas)



No definen una única función (por ejemplo, (*) define dos: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$).

Exponenciales y logaritmos: b^x es fácil de definir si $x \in \mathbf{Q}$ [$b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m}$] pero no si x es irracional (y por tanto $\log_b x$ tampoco está definido). Definiremos primero el logaritmo neperiano así:

$$\log x \quad \ln x = \frac{x}{1} \frac{dt}{t} \quad \text{para } x > 0 \quad [\log x \text{ será siempre neperiano, el decimal } \log_{10} x \text{ no se utilizará}]$$

que es la forma más corta de definirlo, aunque habría que esperar a las integrales para deducir todas sus propiedades. Admitimos que $\log x$ es estrictamente creciente en $\{x > 0\}$ y que su imagen es \mathbf{R} .

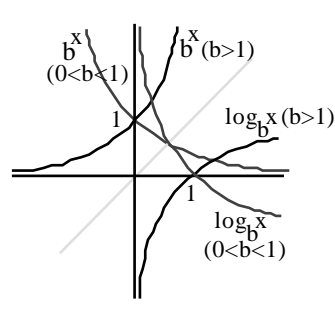
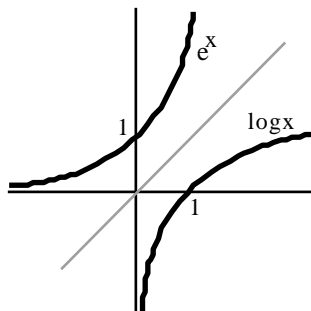
[También admitimos las propiedades clásicas: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$, $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$, $\log(a^b) = b \log a$, si $a, b > 0$]

A partir de la función logaritmo, definimos:

e^x es la inversa de $\log x$ ($\text{dom} = \mathbf{R}, \text{im} = \mathbf{R}^+$)

$$x^b = e^{b \log x} \quad x > 0, \quad b^x = e^{x \log b} \quad (b > 0) \quad x,$$

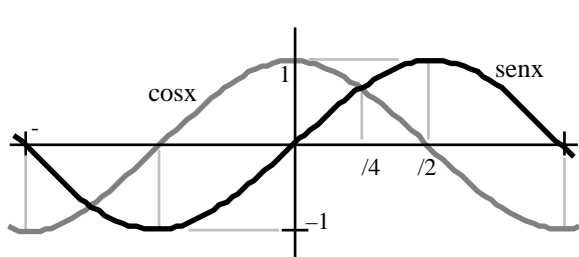
$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} \quad (b > 0, b \neq 1) \quad x > 0$$



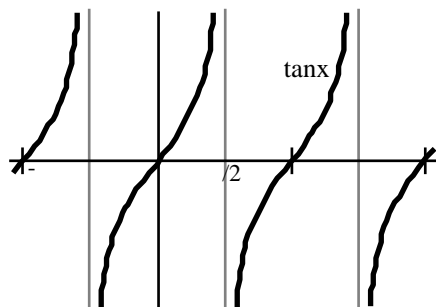
[se podrían deducir $b^0 = 1$, $b^{x+y} = b^x b^y$, $[b^x]^y = b^{xy}$, ...]

Funciones trigonométricas (siempre en **radianes**):

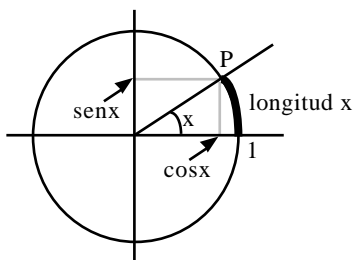
[unas definiciones antes: f se dice **par** si $f(-x)=f(x)$ e **impar** si $f(-x)=-f(x)$;
 f es de **periodo** T o **T-periódica** si $f(x+T)=f(x)$ $\forall x$]



funciones de
periodo 2π .
 $\text{sen } x$ es
impar
y $\text{cos } x$
es par



función de
periodo
 π e impar

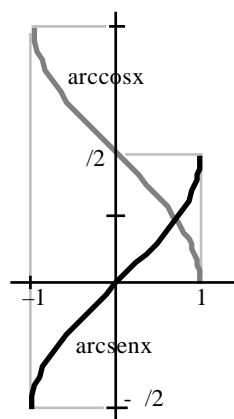


Aceptaremos la definición clásica de $\text{sen } x$ [dado un número x , se toma el punto P sobre la circunferencia unidad tal que x sea la longitud del arco que une $(1,0)$ con P ; el ángulo orientado formado por las semirrectas que pasan por ambos puntos es el ángulo de x radianes y $\text{sen } x$ es la coordenada y de P], a pesar de que no es nada rigurosa, por basarse en el concepto de longitud de una curva cuya definición no tenemos bien definida [se le puede dar rigor utilizando integrales, lo mismo que a $\text{sen } x$: ver Spivak].

A partir del $\text{sen } x$ definimos: $\text{cos } x = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ $\forall x$ y $\text{tan } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$, si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Admitimos que sus gráficas son las de arriba y suponemos conocidas todas sus propiedades clásicas. Breve repaso:

$$\begin{aligned} \text{sen}(k\pi) &= \text{sen}(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \text{tan}(k\pi) = 0, \quad \text{sen}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \text{cos}(2k\pi) = 1, \quad \text{sen}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \text{cos}[(2k-1)\pi] = -1, \\ \text{sen}\frac{\pi}{6} &= \text{cos}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \text{sen}\frac{\pi}{3} = \text{cos}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen}\frac{\pi}{4} = \text{cos}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1, \quad 1 + \text{tan}^2 x = \frac{1}{\text{cos}^2 x}, \\ \text{sen}(a \pm b) &= \text{sen } a \text{cos } b \pm \text{cos } a \text{sen } b, \quad \text{cos}(a \pm b) = \text{cos } a \text{cos } b \mp \text{sen } a \text{sen } b, \quad \text{sen}(2a) = 2 \text{sen } a \text{cos } a, \quad \text{cos}(2a) = \text{cos}^2 a - \text{sen}^2 a, \\ \text{sen } a \text{sen } b &= \frac{1}{2} [\text{cos}(a-b) - \text{cos}(a+b)], \quad \text{cos } a \text{cos } b = \frac{1}{2} [\text{cos}(a-b) + \text{cos}(a+b)], \quad \text{sen } a \text{cos } b = \frac{1}{2} [\text{sen}(a-b) + \text{sen}(a+b)], \\ \text{sen}^2 a &= \frac{1 - \text{cos}(2a)}{2}, \quad \text{cos}^2 a = \frac{1 + \text{cos}(2a)}{2}, \quad \text{sen } a - \text{sen } b = 2 \text{sen} \frac{a-b}{2} \text{cos} \frac{a+b}{2}, \quad \text{tan}(a \pm b) = \frac{\text{tan } a \pm \text{tan } b}{1 \mp \text{tan } a \text{tan } b}, \dots \end{aligned}$$

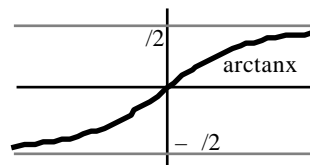


Para definir las funciones trigonométricas inversas debemos restringir los intervalos de definición para que $\text{sen } x$, $\text{cos } x$ y $\text{tan } x$ sean inyectivas:

$\text{arcsen } x$ ($\text{dom}=[-1,1]$, $\text{im}=[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) es la inversa de $\text{sen } x$ restringida a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\text{arccos } x$ ($\text{dom}=[-1,1]$, $\text{im}=[0, \pi]$) es la inversa de $\text{cos } x$ restringida a $[0, \pi]$.

$\text{arctan } x$ [$\text{dom}=\mathbb{R}$, $\text{im}=(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$] es la inversa de $\text{tan } x$ definida en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

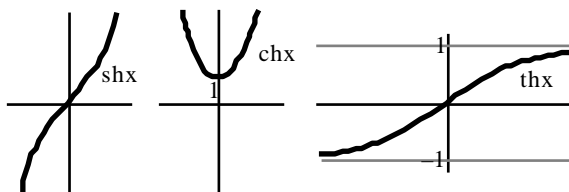


Acabamos con las funciones hiperbólicas (seno, coseno y tangente hiperbólicas) definidas $\forall x$ por:

$$\text{sh } x = \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}], \quad \text{ch } x = \frac{1}{2} [e^x + e^{-x}], \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$$

Tienen propiedades similares a las trigonométricas (todas muy fáciles de comprobar):

$$\begin{aligned} \text{sh}(-x) &= -\text{sh } x, \quad \text{ch}(-x) = \text{ch } x, \quad \text{th}(-x) = -\text{th } x, \\ \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= 1, \quad 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}, \dots \end{aligned}$$



2.2. LÍMITES DE FUNCIONES. FUNCIONES CONTINUAS

Def: f tiende a L (o tiene por límite L) cuando x tiende hacia a [$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} L$ ó $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$]
 si $\epsilon > 0$ $\delta > 0$ tal que si x cumple $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

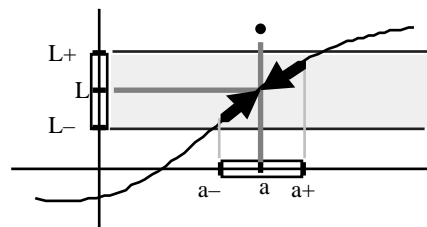
[es decir, $\epsilon > 0$ $\delta > 0$ tal que si $x \in B^*(a, \delta)$ $f(x) \in B(L, \epsilon)$]

[en la definición está implícito que a es un punto interior de $\text{dom} f$ $\{a\}$ para que f tenga sentido en B^* ; también está claro que no importa para nada el valor de f en a , ni siquiera si la función está o no definida en el punto]

Gráficamente: Para todo ϵ debe ser posible encontrar δ

tal que δ esté dentro de la banda ϵ

[evidentemente el δ no es único: si hemos encontrado un δ nos vale también cualquier δ^* más pequeño]



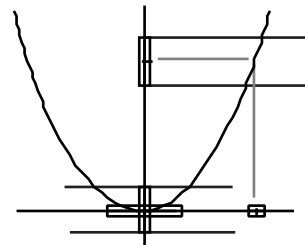
Ejemplos:

$f_1(x) = x^2$ Gráficamente está claro que $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = a^2$ para todo a .

Comprobémoslo para $a=0$. Dado cualquier ϵ , tomando $\delta = \sqrt{\epsilon}$ se tiene que

si $0 < |x - 0| = |x| < \delta = \sqrt{\epsilon}$ entonces $|x^2 - 0^2| = |x|^2 < \epsilon$.

Para otros a es difícil hallar el límite utilizando simplemente la definición. Será un límite trivial en cuanto dispongamos de los teoremas que veremos.

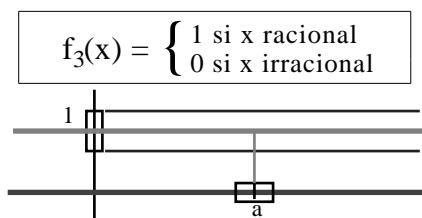


$f_2(x) = x^3 \arctan \frac{1}{x}$

Esta función no está definida en 0 , pero veamos que $f_2(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$.

Para cualquier ϵ debe ser $|f_2(x)| < \epsilon$ si $|x|$ es lo suficientemente pequeño.

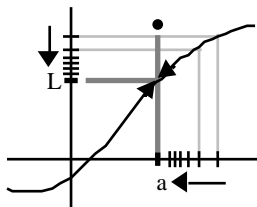
Como $|x^3 \arctan \frac{1}{x}| \leq \frac{1}{2} |x^3| = \frac{1}{2} |x|^3$, bastará tomar $|x| < \sqrt[3]{2\epsilon}$ para que $|x^3 \arctan \frac{1}{x}| < \epsilon$.



Intuitivamente parece claro que f_3 no tiene límite para ningún a . Por ejemplo, $L=1$ no puede ser el límite de $f_3(x)$ cuando $x \rightarrow a$ (racional o irracional) pues por pequeño que sea el δ hay siempre x del entorno (los irracionales) con $|f_3(x) - 1| > \epsilon$ (para los $\epsilon < 1$). Lo mismo pasa con otros posibles límites. El próximo teorema nos dará una manera fácil de formalizarlo.

[La negación de que $f \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow a$ es lo siguiente: existe un ϵ tal que para todo δ existen x con $|x - a| < \delta$ pero cumpliendo $|f(x) - L| \geq \epsilon$ (la negación de que en toda clase hay algún estudiante que, si se examina, aprueba, es que hay una clase en que todos los estudiantes que se examinan suspenden)].

Teor: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ **toda** sucesión $\{a_n\} \subset \text{dom} f - \{a\}$ con $a_n \rightarrow a$ a satisface $f(a_n) \rightarrow L$



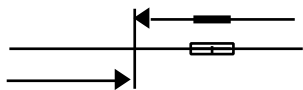
) / si $0 < |x - a| < \delta$ $|f(x) - L| < \epsilon$. Como $a_n \rightarrow a$, $N/n \in \mathbb{N}$ $|a_n - a| < \delta$ y por tanto $|f(a_n) - L| < \epsilon$, con lo que la sucesión $\{f(a_n)\}$ tiende a L .

) Si $f(x)$ no tiende a L existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x con $0 < |x - a| < \delta$ pero $|f(x) - L| \geq \epsilon$. En particular, para todo n existe algún a_n con $0 < |a_n - a| < 1/n$ pero $|f(a_n) - L| \geq \epsilon$: existe, pues, sucesión $\{a_n\}$ que converge hacia a pero con $\{f(a_n)\}$ no tendiendo hacia L .

[Gracias al teorema, para ver que una f no tiene límite en a bastará encontrar una $\{a_n\}$ (formada por puntos del dominio) que tienda hacia a y tal que $\{f(a_n)\}$ diverja, o bien encontrar dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $\{f(a_n)\}$ y $\{f(b_n)\}$ tiendan hacia distintos límites. Por ejemplo, f_3 no tiene límite en a ya que si $\{a_n\}$ es una sucesión de irracionales y $\{b_n\}$ de racionales tendiendo hacia a (siempre se pueden encontrar), $f(a_n) \rightarrow 0$ mientras que $f(b_n) \rightarrow 1$; este teorema nos será muy útil además para otras cosas: para demostrar bastantes teoremas y para calcular límites de sucesiones que aún no sabemos hacer utilizando las potentes técnicas de límites de funciones].

$$f_4(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Es fácil ver que $\lim_{x \rightarrow a} f_4(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } a < 0 \\ 1 & \text{si } a > 0 \end{cases}$ (basta tomar $|x-a| < |a|$).



Parece que no tiene límite cuando $x \rightarrow 0$. Sea $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ que tiende a 0.

$\{f_4(a_n)\} = -1, 1, -1, 1, \dots$ es divergente f_4 no tiene límite en $x=0$.

Sin embargo, tiende a 1 ó -1 si sólo nos fijamos en los x positivos o en los negativos (lo que no sucede con f_3).

Esto nos lleva a definir los límites laterales:

Def: f tiende a L por la derecha (izquierda) cuando $x \rightarrow a$ [$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ ($\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$)] si $\epsilon > 0$ $\delta > 0$ tal que si x cumple $0 < x - a < \delta$ ($0 < a - x < \delta$) entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

[$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_4(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_4(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_4(x) = 1$]. Es inmediato demostrar:

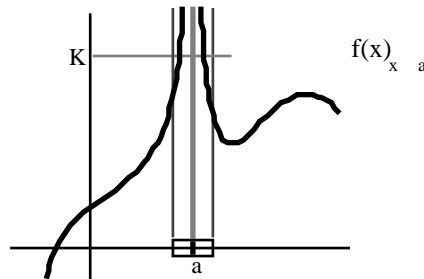
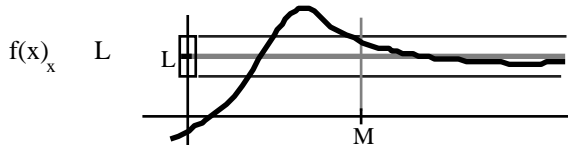
Teor: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ existen $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, y coinciden con L

[por tanto, si no existe un límite lateral, o si existiendo no coinciden, no existe el límite de una f]

Otras definiciones incluyen " ∞ " (no son límites normales; como siempre ∞ es sólo un símbolo):

Def: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ [$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$] si $\epsilon > 0$ $M > 0$ / si $x > M$ [$x < -M$] $|f(x) - L| < \epsilon$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ [$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$] si $K > 0$ / si $0 < |x - a| < \delta$ $f(x) > K$ [$f(x) < -K$]
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ si $K > 0$ $M > 0$ / si $x > M$ $f(x) > K$ [Análogamente $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$]

Un par de interpretaciones geométricas:



Ejemplos: La función $f_5(x) = \frac{1}{x}$ tiende a 0 cuando $x \rightarrow \infty$ pues $\epsilon > 0$ $M = \frac{1}{\epsilon}$ tal que si $x > M$ $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$,
y tiende a ∞ cuando $x \rightarrow 0^+$ pues $K > 0$ $\delta = \frac{1}{K}$ tal que si $0 < x - 0 < \delta$ $\frac{1}{x} > K$.

$f_6(x) = \sqrt[3]{x} + \ln x$, porque $K > 0$ $M > 0$ tal que $f_6(x) > \sqrt[3]{x} - 1 > K$ si $x > M = (K+1)^3$.

Se pueden probar relaciones entre estos nuevos "límites" y los de sucesiones. Por ejemplo:

Teor: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ toda sucesión $\{a_n\}$ cumple $\{f(a_n)\} \rightarrow L$.
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ toda sucesión $\{a_n\}$ domf-{a} con $\{a_n\} \rightarrow a$ cumple $\{f(a_n)\} \rightarrow \infty$.

Como consecuencia de los límites de sucesiones se puede demostrar ahora fácilmente:

Teor: $f(x) \rightarrow L$, $g(x) \rightarrow M$ $f \pm g \rightarrow L \pm M$, $f \cdot g \rightarrow L \cdot M$. Si además $M \neq 0$ $f/g \rightarrow L/M$.
Lo anterior es válido si se sustituye a por a^+ , a^- , $+$ ó $-\infty$.

Todas se demuestran igual. Por ejemplo, la primera: Sea $\{a_n\} \rightarrow a$, $a_n \neq a$. Por tender la suma de dos sucesiones a la suma de los límites: $\lim_n (f \pm g)(a_n) = \lim_n f(a_n) \pm \lim_n g(a_n) = L \pm M$ $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = L \pm M$

[se pueden probar directamente, como en los libros que tratan antes funciones que sucesiones; la de la $+$ por ejemplo:

$|f(x) + g(x) - L - M| = |f(x) - L| + |g(x) - M| < \epsilon$ si $|x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ siendo δ_1 y δ_2 tales que:
 $|f(x) - L| < \epsilon/2$ si $|x - a| < \delta_1$, $|g(x) - M| < \epsilon/2$ si $|x - a| < \delta_2$ (estos δ_1 y δ_2 existen por tener límite f y g).

A partir del concepto de límite definimos el de continuidad. Ahora sí importa el valor de f en a :

Def: f es continua en un punto a (interior al dominio de f) si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, es decir,
si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si x cumple $|x-a| < \delta$ entonces $|f(x)-f(a)| < \epsilon$.

[luego una f no es continua si no existe límite o no existe $f(a)$ o si existiendo no coinciden]

Ejemplos.

Cuatro funciones continuas en cualquier punto a son:

$f(x)=c$: $\forall \epsilon > 0$ para cualquier δ se tiene que $|x-a| < \delta \Rightarrow |c-c|=0 < \epsilon$

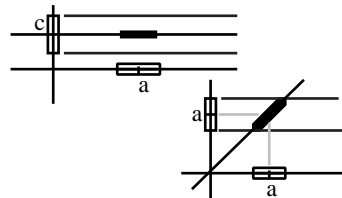
$f(x)=x$: $\forall \epsilon > 0$ tomando $\delta = \epsilon$ se tiene que $|x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \epsilon$

$f(x)=|x|$: $\forall \epsilon > 0$ basta tomar $\delta = \epsilon$ para que sea $||x|-|a|| \leq |x-a| < \delta$ si $|x-a| < \delta = \epsilon$.

$f(x)=\sin x$: $\forall \epsilon > 0$, $|\sin x - \sin a| = |2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}| \leq 2 |\sin \frac{x-a}{2}| \leq 2 \frac{|x-a|}{2} < \epsilon$ si $|x-a| < \epsilon$.

$f_2(x) = x^3 \arctan \frac{1}{x}$ no es continua en 0 , pues no está definida en ese punto. Pero si definimos $f_2(0)=0$ sí lo es, ya que, como vimos, $f_2(x) \rightarrow 0$. Si definiésemos $f_2(0)=7$ sería discontinua.

[Pero la f_4 de antes no puede hacerse continua en 0 , definamos como definamos $f_4(0)$, pues no posee límite en $x=0$]



Del teorema análogo de límites se tiene la caracterización de la continuidad en términos de sucesiones:

Teor: f es continua en a **todo** sucesión $\{a_n\}$ dom f con $a_n \rightarrow a$ satisface $f(a_n) \rightarrow f(a)$
[por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$ si f es continua (no, si es discontinua)]

Hemos definido la continuidad en un punto. En intervalos:

Def: f es continua en (a,b) si es continua en todo x de (a,b)
 f es continua en $[a,b]$ si es continua en (a,b) , $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

[No podemos decir simplemente "continua en todo $x \in [a,b]$ ", pues a y b no son puntos interiores]

De los teoremas para los límites de funciones se deduce:

Teor: Si f y g son continuas en a entonces $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ son continuas en a .
Si además $g(a) \neq 0$, también $\frac{f}{g}$ es continua en a .

Por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = (\text{propiedad de límites}) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$. Las otras igual.

Teor: g continua en a y f continua en $g(a)$ $\Rightarrow f \circ g$ continua en a .

$a_n \rightarrow a$ [g continua en a] $g(a_n) \rightarrow g(a)$ [f continua en $g(a)$] $(f \circ g)(a_n) = f(g(a_n)) \rightarrow f(g(a)) = (f \circ g)(a)$

Teor: f continua en a y estrictamente monótona en un entorno de a $\Rightarrow f^{-1}$ continua en $f(a)$.

Supongamos f estrictamente creciente (si fuera decreciente, se demostraría análogamente).

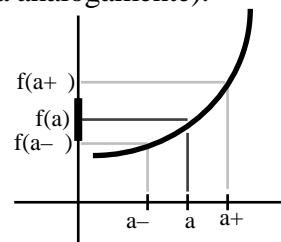
buscamos δ tal que $|y-f(a)| < \epsilon \Rightarrow |f^{-1}(y)-a| < \delta$

(o sea, $f(a)-\epsilon < y < f(a)+\epsilon \Rightarrow a-\delta < f^{-1}(y) < a+\delta$)

El dibujo sugiere tomar $\delta = \min\{f(a)-f(a-\delta), f(a)-f(a-\delta)\} > 0$.

Entonces: $f(a)-\epsilon < y < f(a)+\epsilon \Rightarrow f(a-\delta) < y < f(a+\delta) \Rightarrow a-\delta < f^{-1}(y) < a+\delta$

[$f(a)+\epsilon < f(a+\delta)$, $f(a-\delta) < f(a)-\epsilon$] [f^{-1} creciente]



Comprobemos, utilizando los teoremas anteriores, que:

todas las funciones elementales (descritas en 2.1) **son continuas en su dominio**:

Los polinomios $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ son continuos en todo \mathbf{R}

(ya que son sumas y productos de funciones continuas en todo a de \mathbf{R}).

Las funciones racionales (cocientes de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$) son continuas en todo a con $Q(a) \neq 0$.

Las raíces $f(x) = \sqrt[n]{x}$ son continuas en su dominio: \mathbf{R} si n impar, \mathbf{R}^+ si n par (en $x=0$, hablamos de límite por la derecha), por ser inversas de funciones estrictamente crecientes y continuas.

Las funciones trigonométricas y sus inversas también son continuas en su dominio. En efecto:

Ya vimos que $\sin x$ era continua a \mathbf{R} . $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ es continua a por ser composición de funciones continuas a. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ es continua si $\cos x \neq 0$, es decir, si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. $\arcsin x$, $\arccos x$ son continuas en $[-1, 1]$ y $\arctan x$ es continua por ser inversas de monótonas continuas.

Para justificar la continuidad de exponenciales y logaritmos, con la definición que dimos, habría que esperar al estudio de las integrales. El teorema fundamental de cálculo integral nos asegurará que

$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ es continua $x > 0$. De ahí deducimos la continuidad de las demás:

e^x es continua en \mathbf{R} por ser inversa de continua. Y por ser composición de funciones continuas:

$x^b = e^{b \log x}$ continua $x > 0$, $b^x = e^{x \log b}$ ($b > 0, b \neq 1$) continua x , $\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$ ($b > 0, b \neq 1$) continua $x > 0$.

Las funciones hiperbólicas, sumas y cocientes con denominador no nulo de continuas, lo son.

Combinando todo lo anterior podemos afirmar que muchísimas funciones son continuas en casi todos los puntos sin necesidad de aplicar la definición (el trabajo con los límites lo hemos hecho en los teoremas, sobre todo en los de sucesiones, y sólo para funciones muy raras habrá que acudir a ellos).

Por ejemplo, podemos afirmar que $f_7(x) = \frac{e^{x/(x-1)} + \arctan[\log(x^2+1)] - \cos^3 x + \sqrt[4]{x}}{\operatorname{sh} x [3 + \arcsen \frac{x}{3}]}$ es continua en $(0, 1) \cup (1, 3)$:

el numerador es continuo en $[0, \infty) \setminus \{1\}$, pues $\arctan[\log(x^2+1)] - \cos^3 x$ es continua x [suma de composiciones de continuas], la raíz es continua en $\{x \neq 0\}$ y la exponencial lo es si $x \neq 1$; el denominador es continuo en $[-3, 3]$ [por el $\arcsen(x/3)$] y sólo se anula en 0 [el \arcsen como mucho vale $\pm \pi/2$ y sólo $\operatorname{sh}(0)=0$].

Teniendo tantas funciones continuas el cálculo de límites no tiene ninguna dificultad la mayoría de las veces: bastará sustituir x por a en la expresión de la función. Por ejemplo $f_7(x)$ $f_7(2)$ cuando $x \rightarrow 2$, por ser f_7 continua en 2 . Otros límites, los indeterminados, sí pueden ser difíciles de calcular y habrá que esperar a estudiar derivadas para hacerlo (por ejemplo, el límite de f_7 si $x \rightarrow 0^+$, ya que es de la forma $0/0$). Por último, hay otros límites también sencillos utilizando propiedades análogas a las de sucesiones (demostrables o basándose en aquellas, y utilizando los teoremas que relacionan límites de funciones y de sucesiones, o bien directamente) que podemos esquematizar así:

$"c \pm \infty = \pm \infty"$, $"\infty + \infty = \infty"$, $"\operatorname{acot} \pm \infty = \pm \frac{\pi}{2}"$, $"0 \cdot \operatorname{acot} = 0"$, $"c \cdot \pm \infty = \pm \infty"$ si $c > 0$, $"\frac{\infty}{\infty} = ?"$, $"\frac{c}{\pm \infty} = 0"$, $"\frac{\operatorname{acot}}{\pm \infty} = 0"$, $"\frac{\pm \infty}{c} = \pm \infty"$ si $c > 0$, $"\frac{c}{\pm 0} = \pm \infty"$ si $c > 0$, $"\ln(\infty) = \infty"$, $"e^\infty = \infty"$, $"e^{-\infty} = 0"$, ...

propiedades que hay que leer en el sentido de límites; por ejemplo, $"c \pm \infty = \pm \infty"$ significa que si una función tiende a c y otra a $+\infty$ ó $-\infty$ (cuando $x \rightarrow a$ ó a^+ ó a^- ó $+\infty$ ó $-\infty$), la suma de ambas tiende, respectivamente, a $+\infty$ ó $-\infty$. La notación $+\infty$ ($-\infty$) significa que $f \rightarrow \infty$ siendo $f > 0$ ($f < 0$).

[Con esto, se tiene que $f_7(x) \rightarrow \left(\frac{c^+}{c^*}\right)$ si $x \rightarrow 1^+$ y $f_7(x) \rightarrow \frac{\arctan[\log 2] - \cos^3 1 + 1}{\operatorname{sh} 1 [3 + \arcsen(1/3)]}$ si $x \rightarrow 1^-$].

Como ocurría en sucesiones, a pesar de tanto teorema siguen quedando aún las indeterminaciones:

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{1}$, 0^0 , ∞^0

Vamos a calcular un primer límite indeterminado (será inmediato en el futuro usando la regla de L'Hôpital o los polinomios de Taylor). Nos basamos en propiedades trigonométricas (basadas en la no muy rigurosa definición de $\text{sen } x$, que ya hemos dicho que aceptamos) y en el teorema:

Teor: $\boxed{\text{Si } f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ y } \lim f = \lim h = L \quad \lim g = L \quad (x \rightarrow a, a^+, a^-, + \infty \text{ ó } -\infty, \text{ todos valen})}$

pues $L- < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L+$ $|g(x)-L| < \epsilon$, y los ϵ de los extremos se dan porque $f, h \rightarrow L$.

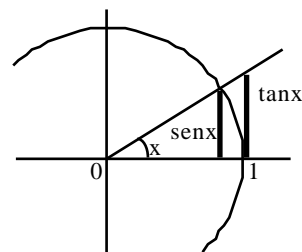
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Si $x > 0$, por el significado geométrico de $\text{sen } x$ y $\tan x$:

$$\text{sen } x < x < \frac{\text{sen } x}{\cos x} \quad 1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x} \quad \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$$

Como $\cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$, el teorema de arriba prueba el límite para $x > 0$.

Si $x < 0$, por ser $\frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\text{sen}(-x)}{-x}$, reducimos el límite al anterior.



En el cálculo de límites es, en ocasiones, conveniente realizar **cambios de variable**:

Teor: $\boxed{[t=g(x)] \quad \text{Si } g \text{ es continua en } a, g(x) \rightarrow g(a) \text{ si } x \rightarrow a \text{ y } \lim_{t \rightarrow g(a)} f(t) = L \quad \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L}$

[casi igual que la demostración de la continuidad de $f \circ g$]

Teor: $\boxed{[t = \frac{1}{x}] \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(1/x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \quad [\text{Análogos con } 0^- \text{ y } -\infty]}$

[basta escribir las definiciones de los límites]

Ejemplos. Deduzcamos de lo anterior algún otro límite indeterminado. Del primer teorema, otro del tipo $0/0$:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\text{sen}(x+5)}{x+5} = 1 \quad [t=g(x)=x+5 \text{ es continua, no se anula si } x \rightarrow -5 \text{ y } \frac{\text{sen } t}{t} \rightarrow 1]$$

Otro que exige un poco de ingenio (pero que será muy fácil cuando estudiemos los desarrollos de Taylor):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Del segundo, el límite de la forma $0 \cdot \infty$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \text{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } t}{t^2} = 1 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = \infty$

Más fáciles de calcular son (no son indeterminados):

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0 \quad [\text{"acot"}] \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen} \frac{1}{x} = 0 \quad [\text{"0.acot"} \text{ o reduciéndolo al anterior}]$$

$$\text{Complicándolo un poco: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos(x^2)} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 0$$

Como ningún teorema nos dice nada sobre el siguiente, tenemos que acudir a la definición:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2)}{x} \text{ no existe porque la función se va al infinito infinitas veces (si } x = [\frac{1}{\sqrt{2}} + k]^{1/2} \text{) y por tanto su gráfica se sale de la banda limitada por } y=L+ \text{ e } y=L- \text{ sea cuál sea el } L.$$

También se pueden deducir límites de sucesiones gracias a los teoremas que los relacionan:

$$\lim_n n^2 \text{sen} \frac{1}{n^2} = 1 \quad [\text{pues } n^2 \text{ es una sucesión que tiende a } \infty \text{ y } f(x) = x \text{sen} \frac{1}{x} \rightarrow 1 \text{ cuando } x \rightarrow 0, \\ \text{o bien, porque } \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \text{ y } g(x) = \frac{\text{sen } x}{x} \rightarrow 1 \text{ cuando } x \rightarrow 0]$$

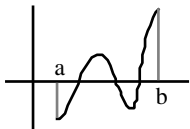
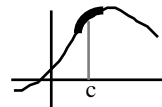
Y si conocemos más cosas sobre sucesiones, también sabemos más sobre series:

$$\text{sen} \frac{1}{n^2} \text{ es convergente, porque } a_n \sim \frac{1}{n^2} \text{ (acabamos de ver que } \frac{a_n}{1/n^2} \rightarrow 1 \text{) y } \frac{1}{n^2} \text{ es convergente.}$$

2.3. TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS

Teor: f continua en c y $f(c) > 0$ [< 0] existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ [< 0] si $x \in (c - \delta, c + \delta)$

Dado $\epsilon = f(c) > 0$ / si $|x - c| < \delta$ $|f(x) - f(c)| < f(c)$ $f(x) - f(c) > -f(c)$ $f(x) > 0$
[si $f(c) < 0$ tomamos $\epsilon = -f(c)$]



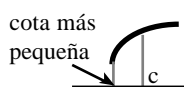
Teor (de Bolzano para funciones continuas):

f continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

[la gráfica de f corta el eje x en algún punto (el teorema no dice donde), tal vez en más de uno]

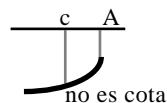
Sea $A = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$. A no está vacío y acotado superiormente (por b) existe $c = \sup A$.

Veamos que $f(c) = 0$: si $f(c) < 0$ / $f(x) < 0$ en $(c - \delta, c + \delta)$ y c no sería cota superior



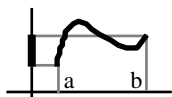
si $f(c) > 0$ / $f(x) > 0$ en $(c - \delta, c + \delta)$ y habría cotas más pequeñas

En ninguno de los dos casos c podría ser el supremo de A .

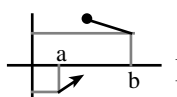


Teor: f continua en $[a, b]$ f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$

[normalmente tomará más



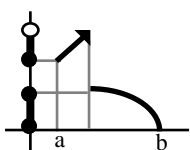
] [si f no es continua, no tiene que tomarlos



Si $f(a) < f(b)$, sea p con $f(a) < p < f(b)$. La función $g = f - p$ es continua en $[a, b]$ con $g(a) < 0 < g(b)$.

El teorema de Bolzano asegura que existe $c \in (a, b)$ con $g(c) = 0$, es decir, con $f(c) = p$.

Si $f(a) > p > f(b)$, como $-f$ es continua y $-f(a) < -p < -f(b)$ $c \in (a, b)$ tal que $-f(c) = -p$.



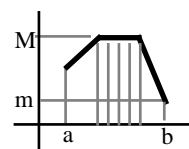
Hemos definido máximo de un conjunto, no de una función. De forma natural, se define valor máximo de f en $A \subset \mathbb{R}$ como el máximo del conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ (en caso de que exista). Análogamente se define valor mínimo de f en A .

[la función del dibujo no tiene valor máximo en $[a, b]$, aunque sí valor mínimo (se alcanza en b y dicho valor es 0); está claro que no es continua en $[a, b]$]

Teor: f continua en $[a, b]$ existen los valores máximo y mínimo de f en $[a, b]$

Es decir, existen $y, z \in [a, b]$ tales que $f(z) \leq f(x) \leq f(y)$ para todo $x \in [a, b]$.

[estos y, z no tienen porque ser únicos, desde luego]



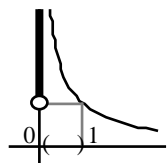
Veamos primero que f continua en $[a, b]$ f acotada en $[a, b]$ (es decir, $f([a, b])$ acotado):

Si f no estuviese acotada superiormente en \mathbb{N} podríamos encontrar un $x_n \in [a, b]$ con $f(x_n) > n$. Como $\{x_n\}$ acotada, existe $\{x_{n_j}\} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ (por ser cerrado). Como f es continua en x_0 tendríamos $f(x_{n_j}) \rightarrow f(x_0)$, lo que es imposible pues $\{f(x_{n_j})\}$ no está acotada ($> n_j$) y no puede converger.

[Análogamente se vería que está acotada inferiormente].

Sea ahora $M = \sup f(I)$. Entonces existe $\{y_n\} \subset I$ tal que $M - 1/n < f(y_n) < M$. Por tanto, $f(y_n) \rightarrow M$. Podría $\{y_n\}$ no ser convergente pero, siendo acotada, existirá $\{y_{n_j}\}$ convergente hacia un $y \in I$. Como f continua en I , $f(y) = \lim \{f(y_{n_j})\} = M$ y, por tanto, el supremo pertenece a $f(I)$.

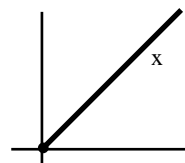
[Análogamente, o considerando $-f$, se ve que el ínfimo también se alcanza]



El teorema no es cierto si se sustituye $[a, b]$ por (a, b) o por $[a,)$:

$f(x) = 1/x$ es continua en $(0, 1)$ pero no alcanza su máximo ni su mínimo en $(0, 1)$ (ni siquiera está acotada superiormente).

$f(x) = x$ no tiene máximo en $[0,)$ (sí, mínimo); no está acotada superiormente.



En la demostración se ve que el teorema es válido en conjuntos cerrados y acotados (se les llama compactos y son importantes en el cálculo más avanzado).

Avanzamos ahora hacia la definición de función uniformemente continua en un intervalo I :

f era continua en I si lo era en cada punto x de I (límites laterales en los posibles extremos de I), es decir si

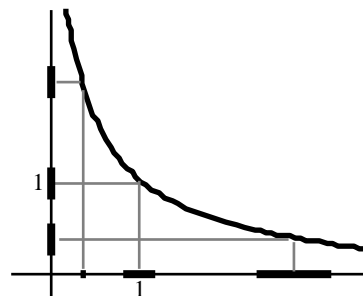
$x \in I$ y $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon, x)$ tal que $y \in I$ si $|y-x| < \delta$ entonces $|f(y)-f(x)| < \epsilon$.

Consideremos $f(x) = \frac{1}{x}$. En $(0,1)$ sabemos que es continua:

$x \in (0,1)$ y $\epsilon > 0$ existe un δ tal que si $|y-x| < \delta$ $\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| < \epsilon$

Pero dado un ϵ se ve que el δ que debemos tomar es más pequeño según consideremos un x más pequeño. Intuitivamente está claro que no podemos encontrar un δ que nos valga para todos los x de $(0,1)$: por pequeño que sea δ , si x es muy pequeño, la función tomará valores muy diferentes en $(x-\delta, x+\delta)$.

Para la misma función en $[1, \infty)$, sin embargo, se ve que dado un ϵ existe un δ que es válido para todos los x del intervalo (el que valga para $x=1$ valdrá para también para los $x > 1$).



Def:

f es uniformemente continua en I si

existe un $\delta(\epsilon)$ tal que $x, y \in I$ si $|y-x| < \delta$ entonces $|f(y)-f(x)| < \epsilon$

Evidentemente:

f uniformemente continua en $I \implies f$ continua en I , pero es falso en general:

Acabemos de formalizar que $f(x)=1/x$ no es uniformemente continua en $(0,1)$:

Sea $\epsilon = 1$. Por pequeño que sea encontramos $x, y \in (0,1)$ con $|y-x| < \delta$ pero $|1/y - 1/x| > 1$. Por ejemplo,

$$x = \frac{3}{4}, y = \frac{1}{4} \text{ satisfacen } |y-x| = \frac{1}{4} < \delta \text{ pero } \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \frac{3}{4} > 1 \text{ (pues } \delta < 1 \text{)}$$

Formalizamos ahora que $f(x)=1/x$ sí es uniformemente continua en $[1, \infty)$:

$$\epsilon > 0 \text{ tal que } x, y \in [1, \infty) \text{ con } |y-x| < \delta \implies \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|y-x|}{xy} < \epsilon \text{ si } |y-x| < \epsilon \cdot xy$$

La implicación hacia la izquierda sí es válida cuando $I=[a,b]$:

Teor:

f continua en $[a,b] \implies f$ uniformemente continua en $[a,b]$

Por reducción al absurdo. Supongamos a la vez f continua y no uniformemente continua en $[a,b]$.

Existe, pues, $\epsilon > 0$ tal que $\delta > 0$ podemos encontrar x, y con $|y-x| < \delta$ pero $|f(y)-f(x)| \geq \epsilon$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\{x_n\}, \{y_n\} \subset [a,b]$ con $|y_n - x_n| < 1/n$ y $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$. $\{x_n\}$ acotada $\implies \{x_{n_j}\}$ convergente a un $c \in [a,b]$ por ser cerrado $\implies f(x_{n_j}) \rightarrow f(c)$ (f continua). Como $|y_{n_j} - x_{n_j}| < 1/n_j \rightarrow 0$ también $f(y_{n_j}) \rightarrow f(c)$ y por tanto $|f(y_{n_j}) - f(x_{n_j})| \rightarrow 0$, lo que está en clara contradicción con el hecho de que $|f(y_{n_j}) - f(x_{n_j})| \geq \epsilon$.

[en la demostración se ve que también este teorema será válido en cualquier conjunto compacto]